



责任编辑：张芳芳 孙鸿宇
封面设计：全品视觉组

物流码



QPG0003094

全品高考

第二轮专题

AI智慧教辅

???

解一元二次不等式实际上就是求出对应的一元二次方程的实数根（如果有实数根）再结合对应的函数的图像确定其大于零或小于零的区间在含有字母参数的不等式中还要根据参数的不同取值确定方程根的大小以及函数图像的开口方向，从而确定不等式的解集

使 $f(x) > 0$ 的区间为单调递增区间；使 $f(x) < 0$ 的区间为单调递减区间

$f'(x_0) = 0$ ，且 $f''(x_0)$ 在 x_0 附近在负（正）右正（负），则 x_0 为极大（小）值点

常用逻辑用语：原命题与逆命题、否命题与逆否命题互逆
原命题与否命题、逆命题与逆否命题互否
原命题与逆否命题、否命题与逆命题互为逆否，互为逆否的命题等价

偶函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相反的单调性，奇函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相同的单调性

$y = f(x)$ 的图像平移
① 横 $= f(x + \phi)$ 的图像
② $\phi > 0$ 向左， $\phi < 0$ 向右

$y = f(x)$ 的图像平移 k 得 $y = f(x) + k$ 的图像， $k > 0$ 向上， $k < 0$ 向下

二元一次不等式 $1x + 2y + 3 > 0$ 的解集在平面直角坐标系中表示直线 $1x + 2y + 3 = 0$ 某一侧所有点组成的平面区域
二元一次不等式组的解集是指各个不等式解集所表示的平面区域的公共部分

把 $y = f(x)$ 图像各点的纵坐标变为原来的 1 倍得 $y = f(x)$ 的图像

数学
作业手册

主编 肖德好

$y = f(x)$ 图像关于点 (a, b) 对称的图像的解析式为
 $y = 2b - f(2a - x)$

偶函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相反的单调性，奇函数在定义域内关于坐标原点对称的区间上具有相同的单调性，使 $f''(x) > 0$ 的区间为单调递增区间；使 $f''(x) < 0$ 的区间为单调递减区间。

本书为AI智慧教辅

“讲题智能体”支持学生聊着学，扫码后哪题不会选哪题；随时随地想聊就聊，想问就问。



服务热线 400-0555-100



绿色印刷产品

印刷质检码20257580

ISBN 978-7-5716-5250-0



9 787571 652500 >

定价：97.80元
(含“特色专项”)

CONTENTS

目录

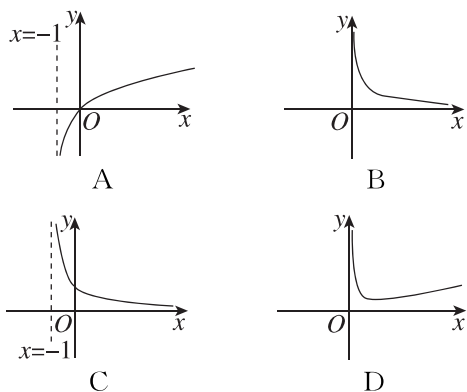
限时集训(一)	微专题 1 函数的图象与性质的应用	107
限时集训(二)	微专题 2 幂、指、对函数	109
限时集训(三)	微专题 3 不等式	111
限时集训(四)	微专题 4 利用导数研究函数的切线、单调性、极值、最值	112
限时集训(五)	微专题 5 函数零点	113
限时集训(六)	微专题 6 不等式恒(能)成立问题	115
提能特训(一)	与零点、极值点有关的证明	117
提能特训(二)	对含有 $\ln x, e^x$ 的不等式证明	119
提能特训(三)	导数与数列交汇问题	121
提能特训(四)	导数与三角函数结合问题	123
限时集训(七)	微专题 7 三角函数的图象与性质、三角恒等变换	125
限时集训(八)	微专题 8 平面向量的应用	127
限时集训(九)	微专题 9 解三角形	129
限时集训(十)	微专题 10 多三角形问题	131
限时集训(十一)	微专题 11 等差数列、等比数列	133
限时集训(十二)	微专题 12 递推数列与数列求和	135
限时集训(十三)	微专题 13 数列与其他知识的交汇问题	137
限时集训(十四)	微专题 14 空间几何体	139
限时集训(十五)	微专题 15 空间几何体的切接问题	141
限时集训(十六)	微专题 16 空间角与空间距离问题	143
限时集训(十七)	微专题 17 立体几何中的截面与动态问题	145
提能特训(五)	立体几何的交汇问题	147
限时集训(十八)	微专题 18 直线与圆	149
限时集训(十九)	微专题 19 圆锥曲线的定义与性质	151
限时集训(二十)	微专题 20 圆锥曲线热点问题(一)求值计算类	153
限时集训(二十一)	微专题 21 圆锥曲线热点问题(二)位置关系类	155
限时集训(二十二)	微专题 22 圆锥曲线热点问题(三)多曲线问题	157
提能特训(六)	圆锥曲线中非对称韦达定理的解题技巧	159
提能特训(七)	圆锥曲线融合交汇问题	160
限时集训(二十三)	微专题 23 计数原理	162
限时集训(二十四)	微专题 24 统计与成对数据的统计分析	164
限时集训(二十五)	微专题 25 概率	166
限时集训(二十六)	微专题 26 随机变量及其分布	168
提能特训(八)	概率与数列交汇问题	171
提能特训(九)	统计概率中的交汇问题	174

基础过关

1. [2025·四川石室中学二模] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = 2^x - 3$, 则 $f(-2) =$ ()

A. 1
B. $\frac{1}{4}$
C. -1
D. $-\frac{11}{4}$

2. 函数 $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$ 的图象大致为 ()



3. [2023·新课标II卷] 若 $f(x) = (x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数, 则 $a =$ ()

A. -1
B. 0
C. $\frac{1}{2}$
D. 1

4. [2023·新课标I卷] 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -2]$
B. $[-2, 0]$
C. $(0, 2]$
D. $[2, +\infty)$

5. [2025·湖南邵阳二模] 已知函数 $f(x) = 3x^3 - \sin x + x$, 则满足 $f(x) + f(4-3x) < 0$ 的 x 的取值范围是 ()

A. $(1, +\infty)$
B. $(-\infty, 1)$
C. $(2, +\infty)$
D. $(-\infty, 2)$

6. [2025·江西九江二模] 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上周期为 2 的偶函数, 且当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \sin x$. 若 $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $b = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $c = f\left(-\frac{11}{4}\right)$, 则 a, b, c 的大小关系是 ()

A. $b < a < c$
B. $c < a < b$
C. $c < b < a$
D. $a < c < b$

7. [2025·广东深圳二模] 已知函数 $f(x) = ae^x - e^{-x}$ (a 为常数), 则下列命题为真命题的是 ()

A. $\forall a \in \mathbf{R}, f(x)$ 为奇函数
B. $\exists a \in \mathbf{R}, f(x)$ 为偶函数
C. $\forall a \in \mathbf{R}, f(x)$ 为增函数
D. $\exists a \in \mathbf{R}, f(x)$ 为减函数

8. (多选题) 已知函数 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$
B. $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$
C. $f(x)$ 是奇函数
D. $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{\pi}, +\infty\right)$ 上单调递减

9. (多选题)[2025·重庆一中模拟] 已知对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+y) = f(x-y) + 2f(y)$, $f(1)=1$, 且当 $x>0$ 时, $f(x)>0$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(3)=3$
 B. $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减
 C. 关于 x 的不等式 $f(x^2-x-2)>4$ 的解集是 $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
 D. $f(2^n x) = 2^n f(x)$

10. 已知 $f(x) = 2^{|x|} + x^2$, 若 $f(a) < 3$, 则实数 a 的取值范围为_____.

11. [2025·南通模拟] 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$, 记 $g(x) = f'(x)$. 若 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(x) + 2g(x) = e^{ax}$, 则 $a =$ _____.

12. [2025·昆明二模] 已知 $f(x) = x^3 - 3x$, $A(-1, f(-1)), B(2, f(2))$, 且点 C, D 在 $f(x)$ 的图象上, 若四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 则四边形 $ABCD$ 的面积为_____.

能力提升

13. [2025·山东德州三模] 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数, 且 $f(x+1) - 2$ 为奇函数, 若对任意的 $a \in [-3, 2]$, 不等式 $f(2a+t) + f(a^2-1) \leq 4$ 恒成立, 则实数 t 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -5]$ B. $(-\infty, 0]$
 C. $[0, +\infty)$ D. $[-5, +\infty)$

14. (多选题)[2025·烟台三模] 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+y) - f(x-y) = 2f(1-x)f(y)$, 且 $f(1)=1$, 则 ()

A. $f(x)$ 为偶函数
 B. $f'(0) + f'(2) = 0$
 C. 4 为 $f'(x)$ 的一个周期
 D. $[f(x)]^2 + [f(1-x)]^2 = 1$

15. (多选题)[2025·湖南邵阳三模] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(-x) = f(x)$, $f(x-2) = -f(-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则下列说法正确的是 ()

A. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-1$ 对称
 B. 函数 $f(x-1)$ 为奇函数
 C. $\sum_{n=1}^{2025} f(n) = 0$
 D. $f\left(\log_3 \frac{4}{81}\right) > f(\log_4 5)$

16. [2025·湖北鄂东南联盟联考] 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 是奇函数, 且在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 若对 $\triangle ABC$ 的某个内角 θ , 不等式 $f(\sin \theta + \cos \theta + 2\sin \theta \cos \theta) - f(1-m) > 0$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是_____.

基础过关

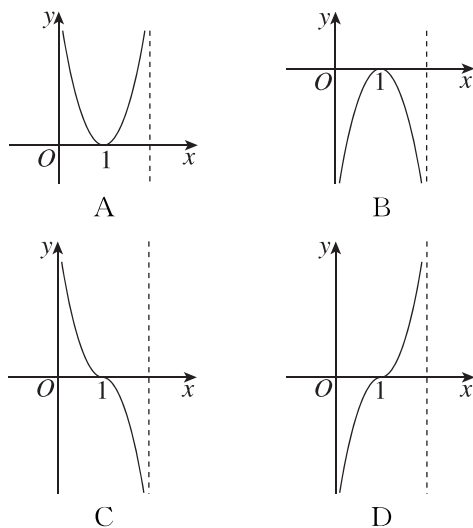
1. $\sqrt[6]{(3-\pi)^6} + \left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 2^{2\log_2 \frac{3}{2}} =$ ()

- A. $\pi + \frac{3}{2}$ B. $\frac{15}{2} - \pi$
C. $3 - \pi$ D. $\pi - 3$

2. $\ln a < \ln b$ 是 “ $a < b$ ” 的 ()

- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

3. [2025·福州二模] 若函数 $f(x) = x^a, x \in (0, +\infty)$ 的图象如图所示, 则函数 $g(x) = \log_a x + \log_a (2-x)$ 的图象大致为 ()



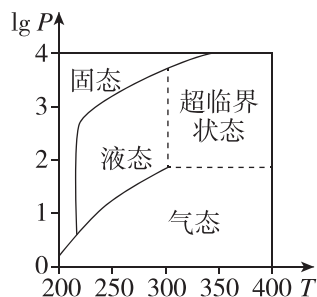
4. 若 $abc \neq 0$, 且 $3^a = 4^b = 6^c$, 则 ()

- A. $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$
C. $\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ D. $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

5. [2025·北京卷] 在一定条件下, 某人工智能语言模型训练 N 个单位的数据量所需要时间 $T = k \log_2 N$ (单位: 小时), 其中 k 为常数, 在此条件下, 已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时, 训练时间增加 20 小时, 则当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时, 训练时间增加(单位: 小时) ()

- A. 2 B. 4
C. 20 D. 40

6. 在北京冬奥会上, 国家速滑馆“冰丝带”使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术, 为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系, 其中 T 表示温度, 单位是 K; P 表示压强, 单位是 bar. 下列结论中正确的是 ()



- A. 当 $T=220, P=1026$ 时, 二氧化碳处于液态
B. 当 $T=270, P=128$ 时, 二氧化碳处于气态
C. 当 $T=300, P=9987$ 时, 二氧化碳处于超临界状态
D. 当 $T=360, P=729$ 时, 二氧化碳处于超临界状态

7. [2025·杭州二模] 定义“真指数” $e_+^x = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$ (e 为自然对数的底数), 则 ()

- A. $e_+^{x_1+x_2} = e_+^{x_1} \cdot e_+^{x_2}$ B. $e_+^{x_1-x_2} = \frac{e_+^{x_1}}{e_+^{x_2}}$
C. $e_+^{x_1} + e_+^{x_2} \geq 2e_+^{\frac{x_1+x_2}{2}}$ D. $e_+^{x_1 x_2} \leq (e_+^{x_1})^{x_2}$

8. (多选题)[2025·湖北孝感三模] 已知函数 $f(x)=\log_a|x-1|$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上单调递增, 则 ()

- A. $0<a<1$
 B. $a>1$
 C. $f(a+2024)>f(2025)$
 D. $f(a+2024)<f(2025)$

9. (多选题)[2024·湖南怀化二模] 已知函数 $y=x+e^x$ 的零点为 x_1 , $y=x+\ln x$ 的零点为 x_2 , 则 ()

- A. $x_1+x_2>0$
 B. $x_1x_2<0$
 C. $e^{x_1}+\ln x_2=0$
 D. $x_1x_2-x_1+x_2>1$

10. [2025·湖南邵阳三模] 已知减函数 $f(x)=a^x$ ($a>0$, 且 $a\neq 1$) 的图象过点 (m,n) , 且 m,n 是方程 $(\log_2 x)^2+3\log_2 x-4=0$ 的两个实数根, 则 $f(-1)$ 的值为_____.

11. [2025·河南部分学校模拟] 对于任意两个正数 $u,v(u<v)$, 记曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $x=u, x=v$ 及 x 轴围成的曲边梯形的面积为 $L(u,v)$, 并约定 $L(u,v)=-L(v,u)$, 德国数学家莱布尼茨最早发现 $L(1,x)=\ln x$. 若 $u=\frac{1}{e}, v=e$, 则围成的曲边梯形的面积为_____.

12. 若对任意 $x\in[2,+\infty)$ 和任意 $a\in\left[\frac{1}{3},2\right]$, 都有 $2^{-x}-2^x\leq a^m+x^2-4x$ 成立, 则实数 m 的取值范围_____.

能力提升

13. 已知函数 $y=3^x$ 的图象上不同的两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 到直线 $y=\frac{1}{3}$ 的距离相等, 则 ()

- A. $x_1x_2<0$
 B. $x_1+x_2<-2$
 C. $y_1y_2>\frac{1}{9}$
 D. $y_1+y_2<2\times 3^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

14. (多选题) 已知正数 a, b 满足 $8^a-\log_3 b=2^b-\log_3 a$, 则 ()

- A. $3a>b$
 B. $3a<b$
 C. $a^{-3}<27b^{-3}$
 D. $3a<b+1$

15. (多选题) 任何一个正实数 R 都可以表示成 $R=m\times 10^k$ ($1\leq m<10, k\in\mathbf{Z}$), 定义: $\Omega(R)=\begin{cases} R \text{ 的整数部分的位数}, k\geq 0, \\ R \text{ 的非有效数字 } 0 \text{ 的个数}, k<0, \end{cases}$ 比如 $\Omega(1.2\times 10^2)=3, \Omega(1.23\times 10)=2, \Omega(3.001\times 10^{-1})=1$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 当 $k>0, M>1, N>1$ 时, $\Omega(M\cdot N)=\Omega(M)+\Omega(N)$
 B. 当 $k<0, N>0$ 时, $\Omega(N)=-k$
 C. 若 $N=2^{100}, \lg 2\approx 0.301$, 则 $\Omega(N)=31$
 D. 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时, $\Omega(2^n)=\Omega(2^{-n})$

16. 已知函数 $f(x)=(x-a)^3\ln\frac{x+b}{x}$ 满足 $f(2-x)=f(x)$, 则 $(2025b)^a=$ _____.

基础过关

- 若集合 $A = \{x \mid y = \sqrt{\frac{x+1}{2-x}}\}$, $B = \{y \mid y = x^2 + 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $[-1, 2)$ B. $[-1, +\infty)$
C. $[1, 2)$ D. $[1, +\infty)$
- 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 则下列说法中正确的是 ()
A. 若 $ab=1$, 则 $a+b \geq 2$
B. 若 $a > b$, 则 $\tan a - \tan b > 0$
C. 若 $a > b$, 则 $\ln(a-b) > 0$
D. 若 $a > b > 0$, 则 $a + \frac{1}{b} > b + \frac{1}{a}$
- 已知 $x < -1$, 则 $4x + \frac{1}{x+1}$ 的最大值为 ()
A. -4 B. 0 C. 4 D. -8
- [2025 · 北京卷] 已知 $a > 0, b > 0$, 则 ()
A. $a^2 + b^2 > 2ab$ B. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{1}{ab}$
C. $a + b > \sqrt{ab}$ D. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{ab}}$
- 下列函数中最小值为 4 的是 ()
A. $y = x^2 + 2x + 4$
B. $y = |\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$
C. $y = 2^x + 2^{2-x}$
D. $y = \ln x + \frac{4}{\ln x}$
- 对任意的 $x \in [1, 2]$, 不等式 $ax^2 - 2x + 3a < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(-\infty, \frac{4}{7})$
C. $(\frac{4}{7}, +\infty)$ D. $(-\infty, \frac{1}{2})$
- [2025 · 河南新乡二模] 已知随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$, $P(X \leq a) + P(X \leq b) = 1 (a > 0, b > 0)$, 则 $\frac{ab}{a+4b}$ 的最大值为 ()
A. 9 B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{9}{2}$ D. $\frac{2}{9}$
- (多选题) 设 a, b, c, d 为实数, 且 $a > b > 0 > c > d$, 则下列不等式正确的有 ()
A. $c^2 < cd$ B. $a - c < b - d$
C. $ac < bd$ D. $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$

- (多选题) [2025 · 夷陵中学模拟] 若正实数 a, b 满足 $2a + b = 1$, 则下列结论正确的是 ()
A. $2ab$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$
B. $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$
C. $\sqrt{2a} + \sqrt{b}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$
D. $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 9
- [2025 · 潍坊二模] 已知 $|x-1| + |x+a| \geq 4$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 已知函数 $f(x) = |\lg x|$, 若 $f(a) = f(b) (a \neq b)$, 则当 $2^a \cdot 3^b$ 取得最小值时, $\frac{a}{b} =$ _____.
- [2025 · 湖南“一起考”一联] 已知 $f(x) = x + \frac{c+4}{x}$, 若 $f(x) = b$ 在 $[-\sqrt{2}, 0) \cup (0, \sqrt{7}]$ 上有解, 则 $b^2 + c^2$ 的最小值是_____.

能力提升

- (多选题) [2022 · 新高考全国II卷] 若实数 x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 则 ()
A. $x + y < 1$ B. $x + y \geq -2$
C. $x^2 + y^2 \geq 2$ D. $x^2 + y^2 \leq 2$
- (多选题) [2025 · 河南南阳模拟] Cobb-Douglas 生产函数是宏观经济学和微观经济学中最常用的生产函数之一, 函数的数学形式为 $Y = AK^\alpha L^\beta$ ($A > 0, K > 0, L > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$), 其中 Y 是总产出, K 是资本存量, L 是劳动力, A 是技术参数, α, β 是资本和劳动的产出弹性. 当 A 不变时, 下列说法正确的是 ()
A. 若 K 与 L 均变为原来的 $m (m > 0)$ 倍, 且 $\alpha + \beta = 1$, 则 Y 变为原来的 m 倍
B. 若 K 与 L 均变为原来的 $m (m > 1)$ 倍, 且 $\alpha\beta = \frac{1}{4}$, 则 Y 最少可变为原来的 m 倍
C. 若 K 与 L 均变为原来的 $m (m > 1)$ 倍, 且 $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$, 则 Y 最少可变为原来的 m 倍
D. 若 α, β, L 均不变, 则函数 $Y = AK^\alpha L^\beta$ 的增长速度越来越慢
- $\sin x \sqrt{1 + 2\cos^2 x}$ 的最小值为_____.

基础过关

- 曲线 $y=e^x$ 在点 $(2, e^2)$ 处的切线与坐标轴所围三角形的面积为 ()
A. $\frac{9}{4}e^2$ B. $2e^2$
C. e^2 D. $\frac{e^2}{2}$
- [2023·新课标II卷] 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增, 则 a 的最小值为 ()
A. e^2 B. e C. e^{-1} D. e^{-2}
- [2025·江西萍乡三模] 已知 x, y 为实数, 设甲: $y>x>0$; 乙: $x-\cos y<y-\cos x$, 则甲是乙的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
- 若函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x-a\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, -1]$ B. $[-1, +\infty)$
C. $(-\infty, 1]$ D. $[1, +\infty)$
- 若曲线 $y=x^3+2x$ 在点 $(1, 3)$ 处的切线也与曲线 $y=x^2+x+m$ 相切, 则 $m=$ ()
A. 4 B. -2 C. -4 D. 2
- [2025·浙江台州二模] 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}-\ln x$ 既有极大值又有极小值, 则 a 的取值范围是 ()
A. $(\frac{1}{4}, +\infty)$ B. $(0, \frac{1}{4})$
C. $(-\frac{1}{4}, 0)$ D. $(-\frac{1}{4}, +\infty)$
- [2025·山东菏泽二模] 已知函数 $f(x)=(x-a-1)e^x-bx(\frac{x}{2}-a)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 则 $b-a$ 的最小值为 ()
A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{e}$ D. e
- (多选题) 已知函数 $f(x)=ax(x-b)^2$, 且 $a<0$, $b \in \mathbf{R}$, 则下列结论正确的有 ()
A. $f(x)$ 不一定有极值
B. 当 $b>0$ 时, $f(a)<f(a+b)$
C. 当 $b<0$ 时, $f(x)$ 的极小值为 0
D. 当 $b=3$ 时, $f(x)$ 在区间 $[a, 3]$ 上的最小值为 $4a$
- (多选题) [2025·合肥一中模拟] 设函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x-a$ 有三个不同的零点, 从小到大依次为 x_1, x_2, x_3 , 则 ()
A. $-27<a<5$
B. 函数 $y=f(x)+a$ 的图象的对称中心为点 $(1, -11)$
C. 过点 $(x_1, f(x_1))$ 引曲线 $y=f(x)$ 的切线, 有且仅有 1 条
D. 若 x_1, x_2, x_3 成等差数列, 则 $a=-11$
- [2025·全国一卷] 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的切线, 则 $a=$ _____.
- [2025·四川成都三诊] 若函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x, & x \leq 0, \\ x^3-3x+a, & x > 0 \end{cases}$ 的值域为 $[-1, +\infty)$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 已知函数 $f(x)=x^2+m, g(x)=2n\ln x$, 若曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 处有相同的切线, 则函数 $F(x)=f(x)-g(x)$ 的最小值为_____.

能力提升

- [2025·浙江天域名校协作体5月联考] 给定非空数集 M , 若函数 $f(x)$ 满足: 对任意 $x, y \in M$, 存在实数 $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, 使得 $|f(x)-f(y)| \leq \alpha|x-y|$ 成立, 则称 $f(x)$ 为“半压缩函数”. 已知 $M=\{x \mid 0 < x < \frac{1}{2}\}$, 则下列四个函数中为“半压缩函数”的是 ()
A. $f(x)=x^2$
B. $f(x)=\sqrt{x}$
C. $f(x)=\cos x+1$
D. $f(x)=\ln(x+1)$
- [2025·山东齐鲁名校协作体模拟] 已知 $0 < b < 1$, 若 $e^a + \ln b = \frac{1}{b^2} - a$, 则 ()
A. $a > b^{-1}$ B. $a > b^{-2}$
C. $e^a < b^{-1}$ D. $e^a < b^{-2}$
- 已知函数 $f(x)=|e^x-1|, x_1 < 0, x_2 > 0$, 函数 $f(x)$ 的图象在点 $A(x_1, f(x_1))$ 和点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的两条切线 l_1, l_2 互相垂直, 且 l_1 与 y 轴交于点 M, l_2 与 y 轴交于点 N , 则 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是_____.

基础过关

- 函数 $f(x)=x^3-12x+16$ 的零点个数是 ()
A. 0 B. 1
C. 2 D. 3
- [2025·河南许平汝名校二模] 若函数 $f(x)=2x^3-3x^2-a$ 在区间 $(1,2)$ 内仅有一个零点,则 a 的取值范围为 ()
A. $(2,3)$ B. $(0,1)$
C. $(-1,4)$ D. $(-1,0)$
- 函数 $f(x)=(x^2-x)\ln|2x-3|$ 在区间 $[-2,2]$ 上的零点个数是 ()
A. 3 B. 4
C. 5 D. 6
- [2025·四川成都三模] 已知函数 $f(x)=2x-m-\ln x$ 有且只有一个零点,则 m 的值是 ()
A. $1-\ln 2$ B. $1+\ln 2$
C. $\ln 2$ D. $-\ln 2$
- [2023·全国乙卷] 函数 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在 3 个零点,则 a 的取值范围是 ()
A. $(-\infty,-2)$ B. $(-\infty,-3)$
C. $(-4,-1)$ D. $(-3,0)$
- (多选题)已知 $x>0, a>0$, 且 $a\neq 1$, 函数 $f(x)=a^x-x^a$, 则 ()
A. 当 $a=e$ 时, $f(x)\geq 0$ 恒成立
B. 当 $a>e$ 时, $f(x)$ 有两个零点
C. 当 $0<a<1$ 时, $f(x)$ 有且仅有 1 个零点
D. 存在 $a>1$, 使得 $f(x)$ 存在三个极值点
- (多选题)[2025·江西南昌模拟] 已知函数 $f(x)=x^2+axe^x-e^{2x}$ 恰有 3 个零点,则 a 的值可以为 ()
A. $\frac{11}{4}$ B. $e-\frac{1}{e}$
C. $e-\frac{1}{3}$ D. e
- [2025·广东深圳二模] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leq 0, \\ x\ln x, & x>0, \end{cases}$ 若 $f(a)=e$, 则实数 $a=$ _____.

9. 已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$, 给出下列四个结论:

- ①若 $k=0$, 则 $f(x)$ 恰有 2 个零点;
- ②存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点;
- ③存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点;
- ④存在正数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

10. 已知函数 $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

- (1)讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2)若 $f(x)$ 有两个零点, 求 a 的取值范围.

能力提升

11. (多选题) 已知函数 $f(x) = \ln(x+1) - a \sin x$, $a \in \mathbf{R}$, 则下列结论正确的是 ()
- A. 当 $a=1$ 时, $f(x)$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$
- B. 当 $a=1$ 时, $f'(x)$ 在 $(-1, \frac{\pi}{2})$ 上存在唯一极大值点 x_0
- C. 存在 a , 使得 $f(x)$ 有且仅有 2 个零点
- D. 存在 a , 使得 $f(x)$ 有且仅有 1 个零点
12. [2025 · 浙江嘉兴二模] 已知函数 $f(x) = \ln x + ax (a > 0)$, 若方程 $f[f(x)] = x$ 在区间 $[2, 4]$ 上有解, 则实数 a 的取值范围为 _____.
13. [2025 · 齐鲁名校联考] 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = x - ax^2 e^x + b$.
- (1) 若 $a=1, b=-1$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-2, f(-2))$ 处的切线方程;
- (2) 若 $a > 0, g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;
- (3) 若对任意 $b \in \mathbf{R}, f(x)$ 至多有 2 个零点, 求 a 的取值范围.
14. 已知函数 $f(x) = e^x - \ln(x+m)$.
- (1) 设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 求 m , 并讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $m \leq 2$ 时, 证明 $f(x) > 0$.

基础过关

- [2025·广州三模] 若不等式 $e^x \geq kx$ ($e = 2.718\ 28\cdots$ 为自然对数的底数) 对任意实数 x 恒成立, 则实数 k 的最大值为 ()
A. 0 B. 1 C. e D. e^2
- 函数 $f(x) = \ln x - mx + 1$, 若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使 $f(x) \geq 0$ 有解, 则 m 的取值范围为 ()
A. $(-\infty, 1]$ B. $(-\infty, 2]$
C. $[1, +\infty)$ D. $[2, +\infty)$
- 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$, $a \in \mathbf{R}$. 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $f(x_1) + f(x_2) < \lambda(x_1 + x_2)$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围为 ()
A. $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ B. $[\frac{3}{2}, +\infty)$
C. $[-\sqrt{2}, +\infty)$ D. $[\sqrt{2}, +\infty)$
- 已知 $a > 1$, 关于 x 的不等式 $a^x \geq x^3$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则 a 的最小值为_____.
- 设函数 $f(x) = (x-1)(e^x - e)$, $g(x) = x - \ln x + a$, 若对任意的 $x_2 \in (0, +\infty)$, 总存在 $x_1 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是_____.
- 设函数 $f(x) = x + \ln x$, $g(x) = x + e^x$, 若存在 x_1, x_2 , 使得 $g(x_1) = f(x_2)$, 则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为_____.
- [2025·江苏苏州八校三模] 已知函数 $f(x) = e^x - ax - 1$.
(1) 当 $a = 1$ 时, 求 $f(x)$ 的最小值;
(2) 若 $f(x) \geq x^2$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

- [2025·沈阳二模] 已知函数 $f(x) = \ln x - kx$.
(1) 若存在 $x \in (0, +\infty)$, 使 $f(x) \geq 0$ 成立, 求 k 的取值范围;
(2) 若 $k > 0$, 关于 x 的不等式 $f(x) \leq \frac{6}{kx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 求 k 的最小值.

能力提升

9. [2025·江苏南通二模] 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数, $f(x) + f'(x) = 2e^x$, 若 $k[f(x) - e^x] \leq x$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, -\frac{1}{e}]$ B. $(-\frac{1}{e}, 0)$
C. $(-\infty, -1]$ D. $[-1, 0)$

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间;

(2) 若 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求 $(a+1)b$ 的最大值.

11. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象在定义域 $\mathbf{R}$ 上连续不断, $f(-x) = f(x)$, $f(x) + f(2-x) = 0$, $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导数.

(1) 证明: $f(x)$ 是周期函数.

(2) 给定 $t \in (0, 2)$, 设 $a \in \mathbf{R}$, 证明: 存在 $k \in [a-t, a+t]$, 使得 $f(k) \leq f(t)$.

(3) 若 $f'(x) = \frac{\pi}{2}f(x+1)$, $f(0) < \sqrt{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 设函数 $F(x) = 3f(x) - f(3x)$.

(i) 求 $F(x)$ 的最大值;

(ii) 若存在 $\theta \in \mathbf{R}$, 使得 $3f(x) - f(3x+\theta) \leq b$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 求实数 b 的最小值.



基础过关

- [2025 · 西安二模] 已知函数 $f(x) = x \ln x - x$.

 - 若 $f(x) \geq mx - e^2$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围;
 - 若 x_0 是函数 $h(x) = f(x) + x^2$ 的极值点, 求证: $f(x_0) + 3x_0 > 0$.
- [2025 · 烟台三模] 已知函数 $f(x) = \ln x + ax - \frac{a}{x} (a < 0)$.

 - 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 - 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_2 \geq 2x_1$, 求 $f(x_1) - f(x_2)$ 的最大值.
- [2025 · 邵阳二模] 已知函数 $f(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$, $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$.

 - 求 $f(x)$ 的极值;
 - 当 $0 < x < 1$ 时, 证明: $f(x) > g(x)$;
 - 当 $F(x) = (be^{x-1} - x)(1 + \ln x - bx)$ 恰有四个零点 $x_1, x_2, x_3, x_4 (0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ 时, 证明: $x_1 x_4 = x_2 x_3$.

能力提升

4. [2025·四省二联] 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + (2-a)x^2 - ax + 1$.

(1) 若 $a=3$, 求 $f(x)$ 的极值.

(2) 若 $a>1$ 且 $b>-1$, 关于 x 的方程 $f(x) + xe^x + b + \frac{1}{2}(a-3)x^2 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上仅有一个实数根 x_0 .

(i) 证明: $a = e^{x_0} + x_0$;

(ii) 求 $4a-b$ 的最大值.

5. [2025·长沙长郡中学一模] 已知函数 $f(x) =$

$$\frac{x \ln x}{a \ln x - 1} (0 < a < 1).$$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求证: 无论 a 取何值, $f(x)$ 都有两个极值点;

(3) 设 $f(x)$ 的极大值点为 x_1 , 极小值点为 x_2 , 求证: $f(x_1) + f(x_2) > 2\sqrt{e}$.

基础过关

1. [2025·河北秦皇岛三模] 设函数 $f(x) = (x - 2)\ln x + 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 证明: $f(x) + e^x > x + 1$.

2. [2025·长春模拟] 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + 1$.

(1) 若 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: 当 $x \geq 1$ 时, $e^x > x + 1 + 2x \ln x$.

3. [2025·武汉四月调考] 已知函数 $f(x) = e^x -$

$$\frac{\ln x}{x} + \frac{a}{x} - 1.$$

(1) 若 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 -1 , 求 a 的值;

(2) 若 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围.

能力提升

4. [2025·江西六校二模] 已知函数 $f(x) = \ln x + ax^2 - x + 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在定义域上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $a = 0$, 证明: $f(x) < \frac{4e^{x-2} - x^2}{x^2}$;

(3) 设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是函数 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $f(x_1) - f(x_2) < \left(2a - \frac{1}{2}\right)(x_1 - x_2)$.

基础过关

1. 已知函数 $f(x) = e^x - x$.

(1) 求证: 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + 1$;

(2) 求证: $f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right) >$

$n + \frac{n}{2n+2} (n \in \mathbf{N}^*)$.

2. 已知函数 $f(x) = -x^3 + mx$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 实数 m 的取值集合为 A .

(1) 求集合 A ;

(2) 当 m 取集合 A 中元素的最小值时, 定义数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 4$, 且 $a_n > 0, a_{n+1} = \sqrt{-3f'(a_n) + 9} - 2$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 在(2)的条件下, 若 $b_n = n(a_n - 1)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

能力提升

3. 不动点在数学的应用中具有重要作用,不动点是指被函数映射到其自身的点.对于函数 $f(x)$,我们把满足 $f(a)=a$ 的 a 称为函数 $f(x)$ 的不动点,已知函数 $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

已知函数 $f(x)=x^3-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

(1)证明: $f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 上有唯一的不动点 x_0 .

(2)已知 $x_1=0, x_{n+1}=f(x_n), y_1=\frac{1}{2}, y_{n+1}=$

$f(y_n), a_n=y_n-x_n$, 且 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, n \in \mathbf{N}^*$. 证明:

① $\{x_n\}$ 为递增数列, $\{y_n\}$ 为递减数列, 且 $y_n > x_n$;

② $S_n \leq 1 - \frac{1}{2^n}$.

4. [2025·山西运城模拟] 已知函数 $f(x)=ax^2-\ln x(a>0)$.

(1)设直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的任意一条切线,若 $kb \leq 0$,求 a 的值;

(2)证明:存在 $r>0$,对任意的 $0<s<t$,且 $s+t \leq 2r$,都有 $f(s)>f(t)$;

(3)证明: $\sum_{i=1}^n \ln \frac{2^i+i}{2^i-i} > 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$.